Contrat Doctoral — ED Galilée

Titre du sujet : Estimations précisées de la différence entre une solution exacte de l'équation des ondes et de son approximation par des faisceaux gaussiens au voisinage d'une caustique de type pli et de type fronce

- Unité de recherche : UMR7539
- Discipline : Mathématiques
- Direction de thèse : Olivier Lafitte
- Contact : lafitte@math.univ-paris13.fr
- Domaine de recherche : Equations aux dérivées partielles
- Mots-clés : Asymptotique haute fréquence, caustiques, paquets d'ondes gaussiens, intégrales oscillantes

La propagation d'ondes (électromagnétiques, acoustiques ou élastiques) dans des milieux hétérogènes est un problème crucial dans nombre d'applications, allant de la compatibilité électromagnétique aux propagations d'ondes sismiques. Des méthodes très anciennes existent pour prendre en compte l'aspect hétérogène (vitesse de propagation d'ondes c dépendant de la position : $c(x, y; z)$) ou de prendre en compte la propagation d'un front d'onde (une surface où se concentre une onde à $t = 0$: $\phi(x, y, z) = 0$). On note $\mathbf{x} = (x, y, z)$ et on considèrera les cas en dimension 1,2,3 d'espace.
Ces méthodes s'appellent l'optique géométrique, ont été introduites suite à l'approximation haute fréquence de Wentzel-Kramers-Brillouin (W.K.B., 1926) et le calcul se fait en suivant des rayons qui sont des courbes vérifiant $\frac{d\mathbf{x}}{ds}(s) = \nabla\phi(\mathbf{x}(s))$, où ϕ vérifie l'équation dite 'eikonale' $(\nabla\phi(\mathbf{x}))^2 = c^{-2}(\mathbf{x})$.
Si on écrit une solution de

$$\Delta u + k^2 n^2(x, y, z)u = 0, \tag{1}$$

où $n = c^{-1}$, les solutions sont souvent supposées de la forme $a(x, y, z, k)e^{ik\phi(x,y,z)}$.
Lorsque le front d'onde n'est pas plan (l'onde n'est pas une onde plane) ou lorsque c n'est pas constant, un phénomène de concentration peut se produire, qui correspond à la présence de 'caustiques' [?]. Les méthodes analytiques et numériques de calcul de a et de ϕ le long des rayons deviennent alors singulières à ces points de caustiques (dans le sens où $|a_0(\mathbf{x})| \to +\infty$, a_0 étant le terme principal de a quand k tend vers $+\infty$, [6]). D'autre part, l'étude de ces points est purement géométrique [2], [4] : on peut alors associer la variété lagrangienne Λ, qui est une sous-variété isotrope de dimension 3 dans le fibré cotangent T^*R^3, qui est contenue dans la variété caractéristique $|\xi|^2 = n^2(\mathbf{x})$, et qui contient l'ensemble des points du front d'onde de l'onde 'incidente' et les points de caustique sont les points où la projection de Λ vers l'espace ambiant R^3 n'est pas propre. L'ensemble de ces points a été étudié de manière détaillée par Thom et porte le nom de théorie des catastrophes.

Les points de caustique peuvent alors se classer en sept catégories, les deux plus simples étant le pli et la fronce, caractérisées par un germe de phase, pour le pli $t^3/3 + xt$, pour la fronce $t^4/4 + xt^2/2 + yt$, ce qui permet d'obtenir les variétés Lagrangiennes canoniques du pli (dimension 1 : $\Lambda = \{(x, \xi), \xi = \partial_x(t^3/3 + xt), \partial_t(t^3/3 + xt) = 0\} = \{(-t^2, t), t \in R\}$) et de la fronce : (dimension 2 : $\Lambda = \{(x, y, \xi, \eta), (\xi, \eta) = \partial_{x,y}(t^4/4 + xt^2/2 + yt), \partial_t(t^4/4 + xt^2/2 + yt) = 0\} = \{(x, -t^3 - xt, t^2/2, t), t \in R, x \in R\}$).

Pour pallier les singularités dûes aux caustiques dans le calcul de l'amplitude a, on utilise souvent des faisceaux de rayons gaussiens (dits aussi paquets d'ondes gaussiens) introduits par exemple par Ralston [10]. Ces rayons gaussiens sont utilisés dans le cadre haute fréquence, pour k 'grand', et pour lesquels on cherche une solution de (1) sous la forme

$$a_g(\mathbf{x})e^{ik\phi_g(\mathbf{x})} = u_g(\mathbf{x}),$$

où $\Im\phi_g > 0$, et où les fonctions a_g et ϕ_g sont régulières dans un voisinage des points de caustique.
La question se pose alors de la précision de cette approximation. De nombreux travaux ont été faits sur ce sujet ([6], [1], [7, 8, 9], [12] par exemple). Les travaux les plus récents (contribution d'O.L. et d'Olof Runborg, 2023 [5]) obtiennent, pour une caustique de type pli particulière (i.e. le cas $n(\mathbf{x}) = 1 - x$), une estimation au voisinage de la caustique de la différence de norme L^∞ entre la solution exacte du problème et la solution approchée utilisant les faisceaux gaussiens (avec la même donnée initiale) de l'ordre de $O(k^{-\frac{5}{6}})$, sachant que hors d'un voisinage de la caustique, l'approximation de l'optique géométrique conduit à une estimation en $O(k^{-1})$. Ce résultat a été obtenu en utilisant la représentation de la solution exacte grâce à la fonction d'Airy (donnée par l'intégrale oscillante $Ai(x) = \frac{1}{2\pi}\int e^{i(t^3/3+xt)}dt$), ainsi que des propriétés de celle-ci [13] pour estimer l'approximation gaussienne.

Il s'agira dans ce travail de thèse de généraliser ce résultat à toute caustique de type pli (approche séminale dans [6]) ou fronce (calcul de la solution exacte et calcul de l'approximation par paquet d'ondes gaussien). Dans un premier temps, le cas général pour une caustique de type pli sera considéré et résolu (en utilisant la géométrie symplectique et l'analyse microlocale, des transformations canoniques et des lemmes de préparation de type Malgrange). Dans un deuxième temps, le cas particulier de la caustique de type fronce d'équation $27y^2 = 4x^3$ sera étudié (ensemble des points où la phase générique $t^4/4 + xt^2/2 + yt$ a un point critique dégénéré, la dégénérescence étant d'ordre supérieur au point de fronce $(x, y) = (0, 0)$). Pour ce type de caustique, on a une solution exacte grâce à la fonction de Pearcey (intégrale oscillante $\int e^{i(t^4/4+xt^2/2+yt)}dt$), mais rien n'a été fait pour les faisceaux gaussiens associés à ce problème. Ce problème peut être abordé aussi bien en introduisant un problème à vitesse de propagation constante et une donnée initiale adaptée, ainsi qu'en étudiant l'interaction d'une onde plane avec un milieu hétérogène.

Références

[1] J. D. Benamou et al. A geometric optics based numerical method for high frequency electromagnetic fields computations near a fold caustic I. *J. Comp. Appl. Math.*, 156(1) :93–125, 2003.

[2] J.J. Duistermaat. Oscillatory integrals, Lagrange Immersions and Unfolding of Singularities *C.P.A.M.* (27) 207-281 (1974)

[3] F. G. Friedlander and J. B. Keller. Asymptotic expansions of solutions of $(\Delta + k^2)u = 0$. *Comm. Pure. Appl. Maths* 8 (3) (1955) 387-394

[4] V. Guillemin and D. Schaeffer. Remarks on a paper of D. Ludwig. *Bulletin of the A. M. S.* 79 (2) 1973, pp382-385

[5] O. Lafitte and O. Runborg : Error estimates for Gaussian beams at a fold caustic. *Asymp. Anal.*135 (2023), 1-2, 209–255

[6] D. Ludwig. Uniform asymptotic expansions at a caustic. *Commun. Pur. Appl. Math.*, 19 :215–250, 1966.

[7] H. Liu, O. Runborg, N. M. Tanushev. Error estimates for Gaussian beam superpositions. *Math. Comp.*, 82 :919–952, 2013.

[8] H. Liu, O. Runborg and N. Tanushev. Sobolev and max norm error estimates for Gaussian beam superpositions. *Commun. Math. Sci.*, 14(7) :2037-2072, 2016.

[9] H. Liu, J. Ralston, O. Runborg, and N. M. Tanushev. Gaussian beam method for the Helmholtz equation. *SIAM J. Appl. Math.*, 74(3) :771–793, 2014.

[10] J. Ralston. Gaussian beams and the propagation of singularities. In *Studies in partial differential equations*, volume 23 of *MAA Stud. Math.*, pages 206–248. Math. Assoc. America, Washington, DC, 1982.

[11] W. Wasow. Linear turning point theory. *Applied Maths Science* 54, Springer, 1985.

[12] C. Zheng. Optimal error estimates for first-order Gaussian beam approximations to the Schrödinger equation. *SIAM J. Num. Anal.*, 52(6) :2905–2930, 2014.

[13] *NIST Digital Library of Mathematical Functions.* http ://dlmf.nist.gov/, Release 1.1.0 of 2020-12-15. F. W. J. Olver, A. B. Olde Daalhuis, D. W. Lozier, B. I. Schneider, R. F. Boisvert, C. W. Clark, B. R. Miller, B. V. Saunders, H. S. Cohl, and M. A. McClain, eds.